Näytejonosysteemit | Tentti 2.12.2005 | Timo Heikkinen
AUT3SN | 11:15 - 13:00 |

Maksimipistemäärä on 6+7+4 = 17 pistettä.

1 Mitä tarkoittavat seuraavat termit ja lyhenteet? Kirjoita lyhyt kuvaus termin tai lyhenteen tarkoittamasta asiasta!

1.1 laskostuminen (2 p)

- näytteenottotaajuuden tulee olla vähintään kaksi kertaa signaalin suurin taajuus (1 p)
- fs ≥ 2 · fMAX (1 p)
- jos näytteistettäessä tapahtuu laskostumista, signaalia ei enää näytteistämisen jälkeen palauttaa alkuperäiseen muotoon (1 p)
- liian korkeataajuuksisesta signaalista näytepisteet vastaavat matalampitaajuisen signaalin näytepisteitä (1 p)
- signaalin spektri "laskostuu" (½ p)

1.2 IIR (2 p)

- Infinite Impulse Response (½ p)
- äärettömän pitkä impulssivaste (1 p)
- ääretön impulssivaste (½ p)
- käytännössä impulssivaste on äärellisen pituinen laskentatarkkuuden rajallisuuden takia (½ p)
- vaatii stabiilisuustarkastelun (½ p)
- lähdön arvo lasketaan nykyisen ja aiempien tulon arvojen sekä aiempien lähdön arvojen perusteella (½ p)
- sisältää takaisinkytkennän (½ p)
- rekursiivinen systeemi (½ p)

1.3 amplitudivaste (2 p)

- systeemin vahvistus taajuuden funktiona (1 p)
- systeemin vahvistus (½ p)
- taajuusvasteen itseisarvo (½ p)
- aina reaalinen ja positiivinen (½ p)
- voidaan arvioida systeemin nollien ja napojen sijainnin perusteella (½ p)

2 Systeemin differenssiyhtälö on

$$y(n) = x(n) - 0.4 \cdot x(n-1) + 0.85 \cdot x(n-2) - 0.81 \cdot y(n-2)$$

2.1 Määritä systeemin siirtofunktio H(z)! (2 p)

$$y(n) = x(n) - 0.4 \cdot x(n-1) + 0.85 \cdot x(n-2) - 0.81 \cdot y(n-2) \overset{z}{\Longleftrightarrow}$$

$$Y(z) = X(z) - 0.4 \cdot X(z) \cdot z^{-1} + 0.85 \cdot X(z) \cdot z^{-2} - 0.81 \cdot Y(z) \cdot z^{-2} \Leftrightarrow$$

$$Y(z) + 0.81 \cdot Y(z) \cdot z^{-2} = X(z) - 0.4 \cdot X(z) \cdot z^{-1} + 0.85 \cdot X(z) \cdot z^{-2} \Leftrightarrow$$

$$Y(z) \cdot \left(1 + 0.81 \cdot z^{-2}\right) = X(z) \cdot \left(1 - 0.4 \cdot z^{-1} + 0.85 \cdot z^{-2}\right) \Big| \div X(z) \Leftrightarrow$$

$$\frac{Y(z) \cdot \left(1 + 0.81 \cdot z^{-2}\right)}{X(z)} = \left(1 - 0.4 \cdot z^{-1} + 0.85 \cdot z^{-2}\right) \Big| \div \left(1 + 0.81 \cdot z^{-2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) \overset{z^2)}{=} \frac{1 - 0.4 \cdot z^{-1} + 0.85 \cdot z^{-2}}{1 + 0.81 \cdot z^{-2}} \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{H(z) = \frac{z^2 - 0.4 \cdot z + 0.85}{z^2 + 0.81}}}$$

2.2 Määritä systeemin nollat ja navat sekä piirrä ne yksikköympyrän kanssa kompleksitasoon! (2 p)

Nollat saadaan laskemalla siirtofunktion osoittajapolynomin nollakohdat:

$$z^2 - 0.4 \cdot z + 0.85 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{0.4 \pm \sqrt{0.4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.85}}{2 \cdot 1} =$$

$$\frac{0.4 \pm \sqrt{0.16 - 3.4}}{2} = \frac{0.4 \pm \sqrt{-3.24}}{2} = \frac{0.4}{2} \pm \frac{\sqrt{(-1) \cdot 3.24}}{2} =$$

$$0.2 \pm \frac{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{3.24}}{2} = 0.2 \pm \frac{j \cdot \sqrt{3.24}}{2} = 0.2 \pm j\frac{\sqrt{3.24}}{2} = 0.2 \pm j\frac{1.8}{2} =$$

$$0.2 \pm 0.9j = \underline{\underline{0.922\angle \pm 77.47^\circ}}$$

Navat saadaan laskemalla siirtofunktion nimittäjäpolynomin nollakohdat:

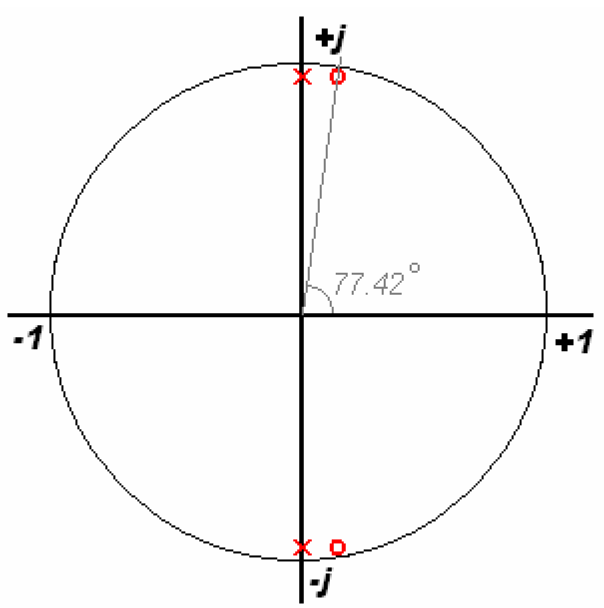
$$z^2 + 0.81 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.81}}{2 \cdot 1} =$$

$$\frac{\pm\sqrt{-4 \cdot 0.81}}{2} = \frac{\pm\sqrt{-3.24}}{2} = \pm\frac{\sqrt{(-1) \cdot 3.24}}{2} =$$

$$\pm\frac{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{3.24}}{2} = \pm\frac{j \cdot 1.8}{2} =$$

$$\pm j \cdot 0.9 = \underline{\underline{0.9\angle \pm 90^\circ}}$$

Nolla-napa-kuvioksi saadaan siis:



2.3 Laske systeemin vahvistus taajuuksilla ω = 0, ω = π ja siirtofunktion napaa vastaavalla taajuudella! (3 p)

Systeemin vahvistus tietyllä taajuudella saadaan laskettua ottamalla itseisarvo taajuusvasteesta eli siirtofunktiosta ja sijoittamalla siihen taajuus ω. Sijoitus voidaan tehdä, kun otetaan huomioon, että kompleksimuuttuja $z = e^{j\omega}$:

$$H(z) = \frac{z^2 - 0.4 \cdot z + 0.85}{z^2 + 0.81} \overset{z=e^{j\omega}}{\Leftrightarrow} \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\frac{e^{j\omega^2} - 0.4 \cdot e^{j\omega} + 0.85}{e^{j\omega^2} + 0.81}\right| =$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\frac{e^{j2\omega} - 0.4 \cdot e^{j\omega} + 0.85}{e^{j2\omega} + 0.81}\right|$$

Lasketaan systeemin vahvistus taajuuksilla ω = 0 ja ω = π:

$$\underline{\omega = 0} \Rightarrow \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\frac{e^{j2\cdot 0} - 0.4 \cdot e^{j\cdot 0} + 0.85}{e^{j2\cdot 0} + 0.81}\right| = \left|\frac{e^{0} - 0.4 \cdot e^{0} + 0.85}{e^{\cdot 0} + 0.81}\right| =$$

$$\left|\frac{1 - 0.4 \cdot 1 + 0.85}{1 + 0.81}\right| = \left|\frac{1 - 0.4 + 0.85}{1 + 0.81}\right| = \left|\frac{1 - 0.4 + 0.85}{1 + 0.81}\right| = \left|\frac{1.45}{1.81}\right| = \underline{\underline{0.801}}$$

$$\underline{\omega = \pi} \Rightarrow \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\frac{e^{j2\cdot\pi} - 0.4 \cdot e^{j\cdot\pi} + 0.85}{e^{j2\cdot\pi} + 0.81}\right| = \left|\frac{1 - 0.4 \cdot (-1) + 0.85}{1 + 0.81}\right| =$$

$$\left|\frac{1 + 0.4 + 0.85}{1 + 0.81}\right| = \left|\frac{2.25}{1.81}\right| = \underline{\underline{1.243}}$$

Lisäksi tulee laskea systeemin vahvistus napaa vastaavalla taajuudella. Edellisessä kohdassa laskettiin siirtofunktion nollat ja navat. Navoiksi saatiin $p_{1,2} = 0.9\angle \pm 90^{\circ}$, joten navan taajuus on 90° = π/2 radiaania. Sijoitetaan tämä arvo amplitudivasteen kaavaan:

$$\underline{\omega = \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\frac{e^{j2\cdot\frac{\pi}{2}} - 0.4 \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} + 0.85}{e^{j2\cdot\frac{\pi}{2}} + 0.81}\right| = \left|\frac{e^{j\pi} - 0.4 \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} + 0.85}{e^{j\pi} + 0.81}\right| =$$

$$\left|\frac{-1 - 0.4 \cdot j + 0.85}{-1 + 0.81}\right| = \left|\frac{-0.15 - 0.4j}{-0.19}\right| = \left|0.789 + 2.105j\right| = \sqrt{0.789^2 + 2.105^2} = \underline{\underline{2.248}}$$

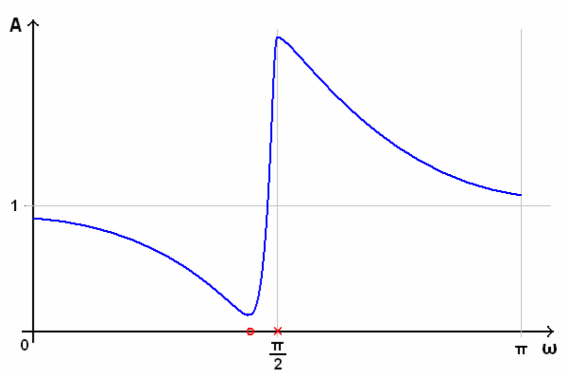
2.4 Piirrä systeemin amplitudivaste nolla-napa-kuviosta päättelemällä! Käytä hyväksesi kohdassa 2.3 saamiasi tuloksia! (2 p)

Systeemin amplitudivaste eli vahvistus taajuuden funktiona voidaan päätellä nolla-napa-kuviosta. Yksikköympyrän reaaliakselin yläpuolisesta kehä ajatellaan taajuuspisteen kulku-uraksi nollasta piihin (0..f_s/2). Kussakin kulku-uran kohdassa mitataan taajuuspisteen etäisyys reaaliakselin yläpuolisiin nolliin ja napoihin. Nollien läheisyys vie vahvistusta kohti nollaa (pienentää vahvistusta) kun taas napojen läheisyys vie vahvistusta kohti ääretöntä (kasvattaa vahvistusta). Pisteissä, joissa etäisyys sekä nolliin että napoihin on sama, on vahvistus yksi.

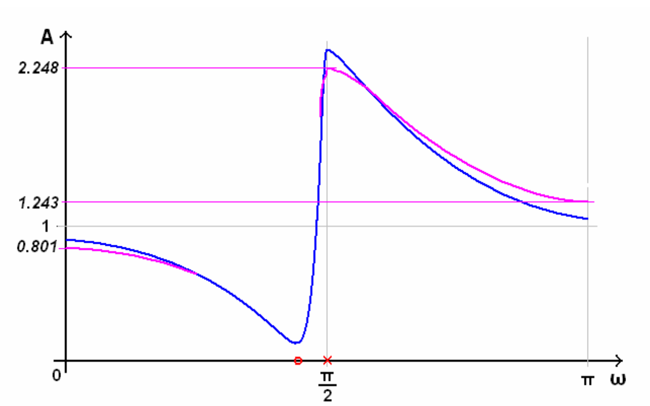
Kohdan 2.2 nolla-napa-kuviossa nolla ja napa ovat melko lähellä toisiaan. Tästä syystä systeemin vahvistus on lähellä yhtä kulmassa 0 ja π. Koska siirtofunktion nolla on hieman pienemmällä taajuudella (kulma 77.42°) kuin napa (kulma 90 °), on nolla hieman lähempänä taajuutta 0; napa taasen on lähempänä taajuutta π. **Siirtofunktion nollan vaikutuksesta systeemin vahvistus on taajuudella 0 hieman alle yksi. Navan vaikutuksesta taasen systeemin vahvistus on taajuudella π hieman yli yhden.**

Vahvistus laskee hyvin alas siirtofunktion nollan läheisyydessä, koska se on melko lähellä yksikköympyrän kehää. Siirtofunktion napa taasen on lähellä nollaa sekä yksikköympyrän kehää, joten vahvistus nousee erittäin jyrkästi heti siirtofunktion nollan jälkeen.

Kaikkiaan amplitudivaste näyttää nolla-napa-kuvion perusteella seuraavanlaiselta:



Kohdassa 2.3 laskettiin systeemin vahvistus kolmessa taajuuspisteessä. Otetaan nämä huomioon muuttamalla tarvittaessa amplitudivastekäyrän sijaintia ja muotoa. Lisätään sitten lasketut vahvistuspisteet vastekäyrään:



3 **Diskreetistä signaalista on valittu analysoitavaksi neljän näytteen pituinen jakso**

$$x(n) = \{2,1,0,1\}$$

3.1 Laske jaksosta DFT-muunnos, kun k=1. (2 p)

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\overset{sij.\,k=1}{\Rightarrow} X(1) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{-j\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\overset{sij.\,N=4}{\Rightarrow} X(1) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{4-1} x(n)\cdot e^{-j\cdot\frac{2\pi}{4}n} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n)\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}n}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\underset{n=0}{\underline{x(0)\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 0}}} + \underset{n=1}{\underline{x(1)\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1}}} + \underset{n=2}{\underline{x(2)\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2}}} + \underset{n=3}{\underline{x(3)\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 3}}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\cdot e^{0} + 1\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}} + 0\cdot e^{-j\cdot\pi} + 1\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 3}\right]$$

$$= \frac{1}{4}[2\cdot 1 + 1\cdot(-j) + 0 + 1\cdot j]$$

$$= \frac{1}{4}[2 - j + j] = \frac{1}{4}[2] = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

3.2 Mikä on k:n arvoa 1 vastaava signaalin taajuus, kun f_s = 8 kHz?

$$f_k = k\cdot\frac{f_s}{N}$$

$$k = 1,\, N = 4 \Rightarrow f_1 = 1\cdot\frac{8\,kHz}{4} = \underline{\underline{2\,kHz}}$$